درس پنجم : گروه های ماتریسی

۱ مقدمه

دردرس قبلی راجع به گروه تبدیلات روی یک مجموعه سخن گفتیم. دراین درس توجه خود را به گروه های تبدیل روی فضاهای خطی (فضای برداری) معطوف می کنیم. هرگاه V یک فضای برداری حقیقی باشد، مجموعه تبدیلات خطی وارون پذیر از V به روی خودش یک گروه تشکیل می دهد. وقتی که برای فضای برداری یک پایه انتخاب می کنیم می توان هرتبدیل خطی را بایک ماتریس نشان داد. هم چنین می دانیم که وقتی دو تبدیل خطی باهم ترکیب می شوند، ماتریس های متناظر با آنها درهم ضرب می شوند. ماتریسی که به تبدیل خطی همانی نسبت داده می شود همان ماتریس واحد است و ماتریسی که به معکوس یک تبدیل خطی نسبت داده می شود معکوس ماتریسی است که به خود تبدیل خطی نسبت داده شده است. درنتیجه گروه تبدیلات خطی روی یک فضای خطی چیزی نیست جزیک گروه که عناصر آن از ماتریس های وارون پذیر تشکیل شده اند. دراین فصل مهمترین گروه های تبدیلات خطی و یا متناظرباآن مهمترین گروه های ماتریسی را معرفی می کنیم. درهرمورد به تبدیلات بی نهایت کوچک نیزنگاه می کنیم. تبدیلات بی نهایت کوچک ما را با مفهوم مولد برای گروه های ماتریسی آشنا می کند.

۲ گروه $GL(n,R)$

مجموعه تمام ماتریس های حقیقی $n\times n$ را با $M_n(R)$ نشان می دهیم. این مجموعه یک فضای برداری است، یعنی می توان هر دو عضو آن را با هم جمع کرد و یا یک عضو آن را در یک عدد حقیقی ضرب کرد و حاصل هنوز متعلق به خود این مجموعه باشد. علاوه بر آن این مجموعه نسبت به ضرب بسته است، و عضو خنثی ضرب نیز دارد که همان ماتریس واحد است ولی یک گروه نیست زیرا همه عناصر آن وارون پذیرنیستند. هرگاه خود را محدود به ماتریس های وارون پذیر کنیم، گروه $GL(n,R)$[1] یعنی گروه ماتریس های حقیقی $n\times n$ بدست می آید. بنابراین می توان نوشت:

$$GL(n,R):=\{g\in M_n(R),\quad |\quad det(g)\in 0\}. \tag{1}$$

این گروه را می توان به عنوان گروه تبدیلات خطی روی فضای برداری R^n در نظر گرفت که عمل آن به شکل ضرب یک ماتریس در یک بردار است یعنی

$$x\longrightarrow x'=gx,\qquad \forall g\in GL(n,R),\quad x\in R^n, \tag{2}$$

[1] General Linear Group of Real Matrices

که در طرف راست ماتریسِ g در بردار x ضرب شده‌است. فرض کنید که V یک فضای برداری حقیقیِ n بعدی باشد. مجموعه تبدیلات خطی وارون پذیر روی فضای برداری V را در نظر بگیرید و آن را با $GL(V)$ نشان دهید. دراین مجموعه ضرب دو تبدیل خطی به صورت عملِ متوالی آنها تعریف می شود، یعنی اگر T و T' دو عضو از $GL(V)$ باشند و $v \in V$ آنگاه TT' به شکل زیر تعریف می شود

$$(TT')v = T(T'v). \tag{3}$$

خواننده براحتی می تواند نشان دهد که این مجموعه یک گروه است. عضو خنثی این گروه نگاشت همانی $Iv = v$ است. بنابراین $GL(V)$ یک گروه است. اما می دانیم که برای فضای برداری V همواره می توان یک پایه انتخاب کرد و دراین پایه هر بردارِ v با مولفه های n تایی اش و هر تبدیل خطی با ماتریسِ $n \times n$ اش متناظر خواهد بود. بنابراین به ازای هر تبدیل خطیِ $T \in GL(V)$ یک ماتریس وارون پذیر متعلق به $GL(n, R)$ وجود دارد و این رابطه یک به یک و پوشا آنچنان است که وقتی دو تبدیل خطی در هم ضرب می شوند، ماتریس های مربوط به آنها در هم ضرب می شوند و به تبدیل همانی نیز ماتریس واحد نسبت داده می شود. نتیجه این تناظر آن است که همه گروه های $GL(V)$ به ازای همه V های n بعدی با گروهِ $GL(n, R)$ یکسان هستند ونیازی به مطالعه تک تکِ آنها نیست.

گروه $GL(n, R)$ دارای n^2 تا پارامتر حقیقی است. تعداد پارامترهای این گروه بعد آن نیز نامیده می شود، بنابراین $GL(n, R)$ یک گروهِ n^2 بعدی است. کوچکترین گروه $GL(1, R)$ است که از اعداد حقیقی مخالف با صفر تشکیل شده است. گروه بعدی $GL(2, R)$ است که از ماتریس های دوبعدی وارون پذیر تشکیل شده است و تبدیلات خطی وارون پذیر روی صفحه حقیقی را تشکیل می دهد

$$GL(2, R) := \{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad | \quad a, b, c, d \in R \quad ad - bc \neq 0\}. \tag{4}$$

این گروه چهارپارامترحقیقی دارد.

۳ گروه $SL(n, R)$

یک زیرگروه مهم از $GL(n, R)$ زیرگروهی است که از ماتریس های با دترمینان واحد تشکیل می شود و $SL(n, R)$[2] خوانده می شود:

$$SL(n, R) := \{g \in GL(n, R) \quad | \quad det(g) = 1\}. \tag{5}$$

[2] Special Linear Group

واضح است که این گروه دارای n^2-1 پارامتر حقیقی است. زیر گروه های مختلف $GL(n,R)$ را می توان به این ترتیب نیز معرفی کرد که هر کدام از آنها علاوه بر آنکه یک تبدیل خطی روی R^n هستند، خاصیت اضافه‌ای از بردار های R^n را مثل خاصیت کلی P نیز حفظ می کنند. واضح است که اگر دو تبدیل خطی خاصیت P را حفظ کنند، حاصل ضرب آن دو تبدیل خطی نیز آن دو خاصیت را حفظ می کنند. عضو خنثی نیز آن خاصیت را حفظ می کند. بنابراین مجموعه‌ی تمام این تبدیل ها یک زیر گروه از $GL(n,R)$ تشکیل خواهد داد. حال می توانیم بپرسیم که تبدیلات متعلق به $SL(n,R)$ جه خاصیتی از بردار ها را حفظ می کنند؟ برای پاسخ به این سوال نخست برای سادگی گروه $SL(2,R)$ را درنظر می گیریم. در فضای R^2 هردوبرداری مثل

$$u=\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, v=\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$$

یک متوازی الاضلاع تعریف می کنند. سطح این متوازی الاضلاع را می توان ازرابطه زیر بدست آورد:

$$S(u,v) := |\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}| = |u_1v_2-u_2v_1| = |\begin{pmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \end{pmatrix}| \tag{6}$$

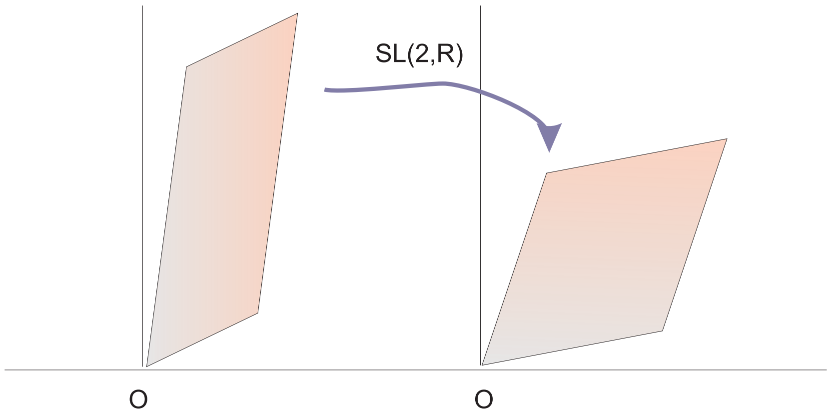
و یا

$$S(u,v) = |det\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}| \tag{7}$$

که درآن رابطه آخر علامت | | برای دترمینان بکاررفته است و دررابطه آخر منظورآن است که بردارهای u و v به ترتیب ستون های اول ودوم یک ماتریس مربعی را تشکیل می دهند. حال تبدیل خطی وارون پذیر $T: R^2 \longrightarrow R^2$ را درنظر می گیریم. این تبدیل بردارهای $v,\ u$ را به بردارهای $v'=Tv,\ u'=Tu$ تبدیل می کند . مساحت متوازی الاضلاع جدید عبارت است از:

$$S(u',v') := |\begin{pmatrix} u' & v' \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} Tu & Tv \end{pmatrix}| = |T||\begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix}| = |T||S(u,v)|. \tag{8}$$

بنابراین اگر دترمینان تبدیل خطی T برابر با 1 باشد مساحت متوازی الاضلاع حفظ خواهد شد. شکل ??.
یادآوری می کنیم که اگر این دترمینان منهای یک هم باشد بازهم این مساحت حفظ خواهد شد اما چنین تبدیلاتی ترتیب بردارهای را عوض خواهند کرد و یک دستگاه راست گرد را به یک دستگاه چپ گرد تبدیل می کنند. علاوه برآن ترکیب چنین تبدیلاتی تشکیل یک گروه نمی دهند زیرا ضرب دوماتریس با دترمینان منهای یک ماتریسی خواهد شد بادترمینان یک. آن دسته از تبدیلات خطی که دترمینان آنهابرابربا 1 است تبدیلات خطی ویژه نامیده می شوند و دراین مثال دوبعدی گروه $SL(2,R)$ را تشکیل می دهند.



شکل ۱: گروه $SL(2,R)$ مساحت بین بردار ها را حفظ می کند.

استدلال بالا را می توان به ابعاد بالاترنیزتعمیم داد. دریک فضای خطی n بعدی بردارهای $u_1,\ u_2,\cdots,\ u_n$ تشکیل یک متوازی السطوح می دهند که حجم آنها از یک دترمینان بدست می آید. مطابق با رابطه قبل خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & S(u'_1,u'_2,\cdots,\ u'_n) := |\begin{pmatrix} u'_1 & u'_2 & \cdots & u'_n \end{pmatrix}| = |\begin{pmatrix} Tu_1 & Tu_2 & \cdots & Tu_n \end{pmatrix}| \\ = \ & |T||\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{pmatrix}| = |T||S(u_1,u_2,\cdots,u_n)|. \end{aligned} \tag{9}$$

بنابر این $SL(n,R)$ را می توان زیرگروهی از $GL(n,R)$ خواند که حجم را حفظ می کند.

بدنیست نگاه نزدیک تری به $SL(2,R)$ بیاندازیم. این گروه سه پارامتر حقیقی دارد. زیرا اگر $g\in SL(2,R)$ آنگاه

$$g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \tag{10}$$

که درآن شرط $ad-bc=1$ بین پارامترهای حقیقی ماتریس برقراراست.
ازلحاظ توپولوژیک این گروه یک سطح سه بعدی با معادله $ad-bc=1$ را درفضای چهاربعدی می سازد. با انتخاب

$$a=x_0+x_3,\quad d=x_0-x_3,\quad b=x_1-x_2,\quad c=x_1+x_2. \tag{11}$$

ین معادله به شکل $x_0^2-x_1^2+x_2^2-x_3^2=0$ درمی آید. این موضوع نشان می دهد که ازلحاظ هندسی $SL(2,R)$ همریخت [3] با یک سطح سه بعدی است. همریختی یک اصطلاح توپولوژیک است به این معنا که

Homeomorphic[3]

می توان یک تابع پیوسته و وارون پذیر از $SL(2,R)$ به روی این سطح سه بعدی تعریف کرد. این سطح قیافه یک هذلولی گون را دارد.
می توان عناصر ماتریس را به شکل زیر توسط سه پارامتر مستقل نشان داد:

$$x_0 = \cosh r \cos\theta \quad x_1 = \sinh r \cos\phi \quad x_2 = \cosh r \sin\theta \quad x_3 = \sinh r \sin\phi. \tag{12}$$

۱.۳ مولدهای گروه $SL(2,R)$

در گروه های متناهی و یا گروه های شمارش پذیر با مفهوم مولد آشنا شدیم و دیدیم که مولدها مجموعه‌ای از عناصر گروه هستند که از حاصل ضرب توان های مثبت و منفی آنها تمام عناصر گروه را بتوان بدست آورد. در گروه های ماتریسی که نوعی از گروه های پیوسته هستند، مفهوم مولد به گونه‌ای دیگر معرفی می شود. در فصل های آینده با مفهوم مولد به طور کلی آشنا می شویم ولی بهتراست در این فصل و در قالب گروه های ماتریسی آن ها را بفهمیم. زیرا به هر حال در اکثر کاربردهای فیزیکی ما با گروه های ماتریسی سرو کار داریم. آشنایی خود را با مثال های ساده شروع می کنیم و سپس این آشنایی را در هر مورد با مطالعه گروه های ماتریسی دیگر بسط می دهیم. به عنوان ساده ترین مثال گروه $SL(2,R)$ را در نظر بگیرید. عناصر این گروه به صورت 10 هستند و یک مجموعه پیوسته سه پارامتره را می سازند. هرگاه در نزدیکی عنصر واحد گروه باشیم پارامترهای a,b,c و d می بایست به شکل زیرباشند:

$$g \approx \begin{pmatrix} 1+\eta_1 & \eta_2 \\ \eta_3 & 1-\eta_1 \end{pmatrix} \tag{13}$$

که درآن پارامترهای η_i همگی کوچکند و از توان دوی آنها می توان صرف نظرکرد. مرسوم است که این پارامتر ها را به شکل زیر انتخاب کنند که درآن شرط دترمینان واحد برای ماتریس g در نظر گرفته شده است.

$$g \approx \begin{pmatrix} 1+\epsilon_3 & \epsilon_1-\epsilon_2 \\ \epsilon_1+\epsilon_2 & 1-\epsilon_3 \end{pmatrix} \tag{14}$$

بنابراین می توان در نزدیکی عنصر واحد گروه همه ماتریس ها را به شکل زیر نوشت:

$$g \approx I + \epsilon_1 T_1 + \epsilon_2 T_2 + \epsilon_3 T_3, \tag{15}$$

که درآن

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{16}$$

مولدهای گروه نامیده می شوند. در فصل های آینده با مفهوم هندسی این مولدها آشنا خواهیم شد و بعضی از سوالاتی که دراین درس ممکن است بی پاسخ بمانند در آن درس پاسخ داده خواهند شد. عجالتا می توانیم با

کمی تسامح بفهمیم که چرا این ماتریس ها مولدهای گروه خوانده می شوند. می دانیم که یک ماتریس به شکل 15 مادام که بتوان از مرتبه دوم پارامترهای ϵ_i صرف نظر کرد، حتماً عضو گروهِ $SL(2,R)$ است. اما اگر پارامترها کوچک نباشند چه؟ دراین صورت چه ترکیبی از T_i ها عضو گروه خواهد بود؟ بیایید پارامترهایی را که لزوماً کوچک نیستند با θ_i نشان دهیم. در این صورت اگر N را عدد بزرگی بگیریم آنگاه می توانیم بگوییم که ماتریس زیر به ازای هر θ_i ای عضو گروه هست (کافی است که N را به اندازه کافی بزرگ بگیریم)

$$g \approx I + \frac{\theta_1}{N}T_1 + \frac{\theta_2}{N}T_2 + \frac{\theta_3}{N}T_3, \tag{17}$$

بنابر خاصیت گروه هرگاه این عناصر را درهم ضرب کنیم بازهم عضو گروه باقی خواهند ماند بنابراین عنصر زیر عضو گروه است

$$g \approx (I + \frac{\theta_1}{N}T_1 + \frac{\theta_2}{N}T_2 + \frac{\theta_3}{N}T_3)^N, \tag{18}$$

این تساوی تقریبی است ولی در حد $N \longrightarrow \infty$ تبدیل به یک تساوی دقیق می شود. اما با استفاده از بسط e^x این امر به این معناست که

$$g = \lim_{N\longrightarrow\infty}(I + \frac{\theta_1}{N}T_1 + \frac{\theta_2}{N}T_2 + \frac{\theta_3}{N}T_3)^N = e^{\theta_1 T_1+\theta_2 T_2+\theta_3 T_3}, \tag{19}$$

به ازای هر مقادیری از $\theta_1, \theta_2,\ \theta_3$ عضوی از گروه است. آیا هر عنصر گروه را می توان به این شکل نوشت؟ پاسخ این سوال نیز مثبت است اگر چه استدلال آن دراین درس داده نخواهد شد. خواننده علاقمند برای مطالعه بیشتر دراین مورد می بایست به کتاب های پیشرفته تر در زمینه گروه ها مراجعه کند. به این ترتیب معلوم می شود که چرا به T_i ها مولدهای گروه گفته می شود. آنچه که در این بخش گفتیم در مورد بقیه گروه هایی که در بخش های بعدی معرفی می کنیم نیز صدق می کند. یعنی همواره مولدهارا از بسط دادن یک عنصر دلخواه گروه در نزدیکی عنصر واحد بدست می آوریم. یعنی به طور کلی قرار می دهیم

$$g \approx I + L \tag{20}$$

که درآن L ماتریسی است که همه درایه های آن بی نهایت کوچکند و می توان از مرتبه دوم آنها صرف نظر کرد. آنگاه L را برحسب پارامترهایی که دارد بسط می دهیم. ضرایب این پارامترها همان مولد ها هستند. از آنجا که پارامترها را به طرق متعددی می توان اختیار کرد، مجموعه مولدهای یک گروه نیز یکتا نیست. تعداد مولد ها برابر با تعداد پارامترهای گروه است .

۲.۳ مولدهای گروه $SL(n,R)$

هرگاه g متعلق به $SL(n,R)$ باشد به این معناست که $det(g)=1$. می نویسیم

$$g \approx I + L, \tag{21}$$

درتمرین ها نشان خواهید داد که

$$det(g) \approx 1 + tr(L) \qquad (22)$$

بنابراین L می بایستی ماتریسی باشد با ردّ برابر با صفر. برای نوشتن مولدها احتیاج به یک نمادگذاری داریم. ماتریس E_{ij} را ماتریسی می گیریم که تنها درایه ij آن برابر با یک و بقیه درایه هایش برابر با صفرند. به عبارت دیگر

$$(E_{ij})_{kl} = \delta_{ik}\delta_{jl}. \qquad (23)$$

یک انتخاب برای مولدهای $SL(n,R)$ عبارت است از:

$$\{E_{ij}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n, \quad E_{ii} - E_{nn}, \quad 1 \leq i < n\}. \qquad (24)$$

۴ گروه $O(n,R)$

گروه $O(n,R)$ یکی دیگر از زیرگروه های $GL(n,R)$ است که از ماتریس های متعامد تشکیل شده است یعنی

$$O(n,R) = \{A \in GL(n,R), \quad | \quad A^T = A^{-1}\}. \qquad (25)$$

خواننده براحتی می تواند گروه بودن این مجموعه را ثابت کند. به یک طریق دیگر نیز می توانیم این گروه را معرفی کنیم. هرگاه فضای برداری حقیقی V دارای مجهز به یک ضرب داخلی باشد $\langle,\rangle$ می توان برای آن یک پایه متعامد یکه ساخت. دراین صورت ضرب داخلی هر دوبردار $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ و $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ y_n \end{pmatrix}$ دراین فضا به صورت زیر درمی آید:

$$\langle x,y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x^t y \qquad (26)$$

که درآن x^t ترانهاده x است. یک تبدیل متعامد خطی تبدیلی است که ضرب داخلی بردارها را حفظ کند. یعنی اگر $x' = Ax$ و $y' = Ay$ آنگاه می خواهیم که $x'^t y' = x^t y$ و درنتیجه $A^t A = I$. براحتی معلوم می شود که ترکیب دو تبدیل متعامد یک تبدیل متعامد است. بنابراین گروه تبدیلات متعامد گروه ماتریس های حقیقی ای است که درشرط $A^t A = I$ صدق می کنند.
هرماتریس $A \in O(n,R)$ دارای دترمینان برابر با ± 1 است. آن عده از ماتریس ها که دترمینان $+1$ دارند تشکیل یک زیرگروه می دهند که گروه $SO(n,R)$ نامیده می شود. دردرس های آینده نشان خواهیم داد که

ماتریس های $SO(n,R)$ تبدیل های دوران را ایجاد می کنند. حال سوال این است که کل گروه $O(n,R)$ چه نوع تبدیلاتی را ایجاد می کنند. از این به بعد $O(n,R)$ و $SO(n,R)$ را به اختصار $O(n)$ و $SO(n)$ می نویسیم.

ماتریس انعکاس نسبت به صفحه عمود بر یکی از محورها مثل محور x، یعنی ماتریس I_x را به شکل زیر تعریف می کنیم:

$$I_x = diagonal(-1, 1, 1, \cdots 1). \tag{27}$$

حال براحتی دیده می شود که هرگاه $detg = -1$ آنگاه $det(I_x g) = 1$ و درنتیجه $A := I_x g \in SO(n)$. بنابراین هرماتریس g بادترمینان منهای یک را می توان به صورت $I_x A$ نوشت. این امر بدین معناست که بقیه گروه $O(n)$ یک هم مجموعه راست I_x از زیرگروه $SO(n)$ است. درنتیجه بدست می آوریم

$$O(n) = SO(n) \cup I_x SO(n). \tag{28}$$

ممکن است که خواننده دراین جا بپرسد که در یک فضای برداری V انواع و اقسام ضرب های داخلی را می توان تعریف کرد. آیا به ازای هر ضرب داخلی یک گروه جدید بوجود می آید. فرض کنید که ضرب داخلی را به شکل زیر تعریف کنیم:

$$\langle x, y\rangle = x^T K y, \tag{29}$$

که درآن K یک ماتریس متقارن و مثبت است. ماتریس مثبت ماتریسی است که ویژه مقدارهای آن همه مثبت باشند. مسلم است که رابطه بالا یک ضرب داخلی جدید تعریف می کند و تبدیلاتی که این ضرب داخلی را حفظ کنند نیز تشکیل یک زیر گروه از $GL(n,R)$ می دهند. اگر این زیر گروه را با $O_K(n,R)$ نشان دهیم و $A \in O_K(n,R)$ آنگاه A در شرط زیر صدق می کند:

$$A^T K A = K, \tag{30}$$

با استفاده از اینکه K یک ماتریس مثبت است می توان آن را قطری کرد و سپس با استفاده از ماتریس قطری کننده‌ی آن می توان یک یکسانی بین $O_K(n,R)$ و $O(n,R)$ تعریف کرد. پیدا کردن این یکسانی را در تمرین ها به عهده خواننده می گذاریم.

۱.۴ گروه دوران در سه بعد

چراگروه $SO(3)$ را باگروه دوران های فضای سه بعدی یکی می گیریم؟ آیا گروه $SO(n)$ نیز گروه دوران هادرفضای n بعدی است؟ برای پاسخ به این سوالات می بایست کمی از راه اصلی درس خارج شویم و یک نگاه

مقدماتی به مطالبی بکنیم که بطور دقیق تر دردرس های آینده خواهند آمد. تبدیلات بی نهایت کوچک $SO(3)$ را درنظرمی گیریم. این تبدیلات توسط ماتریس هایی انجام می شوند که نزدیک به عنصر واحد هستند. اگر $g\in G$ یک عضو گروه $SO(3)$ باشد که درنزدیکی ماتریس واحد I قراردارد می توان آن را به شکل زیرنوشت:

$$g\approx I+L \tag{31}$$

که درآن L ماتریسی است با درایه های کوچک. متعامد بودن g به این معناست که

$$g^tg=I\longrightarrow (I+a)(I+a^t)=I\longrightarrow a+a^t=0, \tag{32}$$

که درآن از ماتریس a^ta بدلیل کوچک بودن درایه های آن صرف نظرکرده ایم. ازاین رابطه نتیجه می گیریم که a یک ماتریس پادمتقارن است. یک ماتریس پادمتقارن را می توان به شکل زیرنوشت:

$$a=\begin{pmatrix} 0 & -\eta_3 & \eta_2\\ \eta_3 & 0 & -\eta_1\\ -\eta_2 & \eta_1 & 0\end{pmatrix}, \tag{33}$$

که درآن $\eta_{1,2,3}$ پارامترهای کوچکی هستند. می توان با نوشتن (η_1,η_2,η_3) به صورت $\theta(n_1,n_2,n_3)$ که درآن θ یک پارامتر بی نهای کوچک و $n=(n_1,n_2,n_3)$ یک برداریکه است تبدیل بی نهایت کوچک g رابه شکل زیرنوشت:

$$g\approx I+\theta n\cdot L, \tag{34}$$

که درآن

$$L_1=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\qquad L_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 0 & 0\end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}. \tag{35}$$

می توان براحتی دید که درایه های ماتریس های فوق از رابطه فشرده زیربدست می آیند:

$$(L_j)_{kl}=-\epsilon_{jkl} \tag{36}$$

و درنتیجه

$$g_{kl}=\delta_{kl}+\theta n_j(L_j)_{kl}=\delta_{kl}-\theta n_j\epsilon_{jkl}. \tag{37}$$

حال وقتی که چنین ماتریسی روی بردار سه بعدی $r=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$ اثر بکند آن را تبدیل به برداری مثل $r'=\begin{pmatrix} x'_1\\ x'_2\\ x'_3\end{pmatrix}$ می کند به نحوی که:

$$r'=gr\longrightarrow x'_k=g_{kl}x_l=(\delta_{kl}-\theta n_j\epsilon_{jkl})x_l=x_k-\theta n_j\epsilon_{jkl}x_k \tag{38}$$

و یا اگر به رابطه ضرب خارجی بردارها درفضای سه بعدی توجه کنیم

$$r' = r + \theta n \times r. \tag{39}$$

اما این رابطه به این معناست که بردار r حول محور n به اندازه زاویه کوچک θ چرخیده است. بنابراین ماتریس g یک دوران حول محور n به اندازه زاویه θ ایجاد کرده است.
حال ازخود می پرسیم که چه ماتریسی می تواند حول محور n دوران های بااندازه دلخواه ایجاد کند. پاسخ این سوال ساده است، زیرا یک دوران دلخواه حول یک محوررا می توان از تعداد بسیارزیادی دوران بازاویه بسیارکوچک بدست آورد. به عبارت دقیق تر یک دوران به اندازه زوایه θ را که دیگر لزوماً کوچک نیست می توان از N دوران پشت سرهم به اندازه زوایه $\frac{\theta}{N}$ بدست آورد. هرکدام ازاین دوران ها با ماتریس $(I + \frac{\theta}{N} n \cdot L)$ بوجود می آیند و هرچه که $\frac{\theta}{N}$ کوچک ترباشد این حرف دقیق تراست. بنابراین یک دوران محدود حول محور n به اندازه زوایه θ که آن را با $R_n(\theta)$ نشان می دهیم باماتریس زیرایجاد می شود:

$$R_n(\theta) = \lim_{N \longrightarrow \infty} (I + \frac{\theta}{N} n \cdot L)^N = e^{\theta n \cdot L}. \tag{40}$$

ازانجا که حاصلضرب هردو ماتریس متعامد با دترمینان یک خود یک ماتریس متعامد با دترمینان یک است، پس ماتریس $R_N(\theta)$ نیز که ازحاصلضرب تعداد زیادی از ماتریس های با این خاصیت به وجود آمده است، یک ماتریس متعامد بادترمینان یک و درنتیجه عضو گروه $SO(3)$ است.
ماتریس های L_2, L_1 و L_3 مولدهای گروه دوران یا مولد های گروه $SO(3)$ خوانده می شوند.
براحتی می توان شکل صریح ماتریس های $R_y(\theta), R_x(\theta)$ و $R_z(\theta)$ رابدست آورد. نتیجه عبارت خواهد بود از:

$$R_{\hat{x}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{41}$$

$$R_{\hat{y}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}, \tag{42}$$

$$R_{\hat{z}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{43}$$

انجام این محاسبه را به عنوان تمرین به خواننده واگذارمی کنیم.
دردرس گذشته ثابت کردیم که گروه $SO(3)$ روی کره دوبعدی به صورت تراگذارعمل می کند و زیرگروه

همسانگردآن عبارت است از $SO(2)$ وازاین مطلب استفاده کردیم و دیدیم که به عنوان مجموعه همریختی زیربرقراراست :

$$SO(3)/SO(2) \equiv S^2. \tag{44}$$

حالا می توانیم معنای شهودی این همریختی را بینیم. این رابطه درواقع بیان کننده این است که هرعنصر گروه $SO(3)$ که چیزی جزیک دوران نیست بایک زاویه دوران ($So(2)$) و یک بردار یکه که محوردوران را مشخص می کند و بنابراین یک نقطه روی کره S^2 است، تعیین می شود. به عبارت دیگر هرگاه محوردوران را مشخص کنید، که به معنای معین کردن یک هم مجموعه از $SO(3)/SO(2)$ است تمام اعضای آن هم مجموعه از تغییر زاویه دوران به ازای همان محوردوران بوجود می آیند. با تغییر محوردوران همه اعضای گروه $SO(3)$ بوجود می آیند.

۲.۴ گروه دوران در بعد دلخواه

تاکنون گروه دوران درفضای سه بعدی را مطالعه کردیم ودیدیم که هرعنصر گروه $SO(3)$ درواقع یک دوران درفضای سه بعدی ایجاد می کند. حال گروه دوران دربعد دلخواه رابررسی می کنیم. روش ما همانی است که دربخش گذشته برای سه بعد دنبال کردیم بنابراین ازذکرجزییات تکراری پرهیزمی کنیم. اگر $g \in SO(n)$ یک عضو نزدیک به واحد باشد آنگاه

$$g \approx I + a \tag{45}$$

که درآن a یک ماتریس پادمتقارن است. این ماتریس را می توان به صورت زیربسط داد:

$$a = \theta \sum_{1=i<j=n} n_{ij} T_{ij} = \theta \sum_{1=i<j=n} n_{ij} T_{ij} \tag{46}$$

که درآن T_{ij} ها ماتریس هایی هستند که به عنوان پایه برای فضای ماتریس های پادمتقارن بکارمی روند و به صورت زیرتعریف می شوند:

$$T_{ij} := E_{ij} - E_{ji} \tag{47}$$

و E_{ij} ماتریسی است که تنها درایه غیرصفر آن درسطر i ام و ستون j ام و برابربا 1 است. این رابطه هم چنین نشان می دهد که تعداد پارامترهای گروه $SO(n)$ برابراست با $\frac{n(n-1)}{2}$. ازاین به بعد نماد $n \cdot T$ را بجای $\sum_{1=i<j=n} n_{ij} T_{ij} = \theta \sum_{1=i<j=n} n_{ij} T_{ij}$ بکارمی بریم.

هرعضواز نوع $g \approx I + \theta T_{ij}$ یک دوران کوچک درفضای n بعدی درصفحه ij به اندازه زاویه کوچک θ انجام می دهد وهرعضو به صورت

$$R_{ij}(\theta) = e^{\theta T_{ij}}$$

یک دوران محدود θ درصفحه ij ایجاد می کند. بایک محاسبه ساده شبیه به آنچه که درمورد $SO(3)$ انجام دادید می توانید نشان دهید که مثلاً درفضای 4 بعدی

$$R_{12}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{48}$$

که بوضوح نشان می دهد این ماتریس یک دوران درصفحه 12 به اندازه زاویه θ انجام می دهد. یک دوران کلی باماتریس زیرمشخص می شود:

$$R_n(\theta) = e^{\theta n\cdot T}. \tag{49}$$

دقت به این نکته لازم است که ازآنجایی که n یک بردارنیست نمی توان گفت که هردوران درفضای n بعدی با یک زاویه دوران (θ) ویک محوردوران مشخص می شود. می توان به این مطلب اززاویه دیگری نیز نگاه کرد به این صورت که اگر برای هردوران یک محور مشخص کنیم آنچه که ازدوران باقی خواهد ماند دیگر یک زاویه تنها نیست. این موضوع از همریختی

$$SO(n)/SO(n-1) \equiv S^{n-1}$$

که دردرس گذشته ثابت کردیم نیز معلوم است. محوردوران توسط یک نقطه از کره S^{n-1} مشخص می شود اما آنچه که باقی می ماند تنهایک زاویه نیست بلکه یک عضو گروه $SO(n-1)$ است که درواقع دوارنی است که آن محوررا ثابت نگاه می دارد.

۵ گروه $O(p,q)$

ممکن است که ضرب داخلی که روی فضای حقیقی V تعریف کرده ایم مثبت نباشد. مهمترین مثال این نوع ضرب داخلی، عبارت از ضربی که برای چهاربردارهای فضازمان تعریف می کنیم که درآن برای دو چهاربردار $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ و $y = (y^0, y^1, y^2, y^3)$ به صورت زیر تعریف می شود:

$$\langle x, y\rangle := x^0y^0 - x^1y^1 - x^2y^2 - x^3y^3 = x^t\eta y, \tag{50}$$

که درآن

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{51}$$

متریک فضازمان خوانده می شود. این متریک یک متریک شبه اقلیدسی از نوع $(1,3)$ خوانده می شود.
درحالت کلی می توان روی یک فضا متریکی از نوع (p,q) تعریف کرد که روی قطرآن p تا یک و q تا منهای یک قراردارد. دقت کنیدکه دریک فضای حقیقی باتغییرپایه نمی توان -1 ها را به 1 تبدیل کرد.
حال اگر روی یک فضا متریکی از نوع (p,q) مثل

$$\eta = diagonal(1, 1 \cdots 1, -1, -1, \cdots -1), \tag{52}$$

تعریف کرده باشیم آنگاه مجموعه تبدیلات خطی Λ که ضرب داخلی بردارها را حفظ کنند می بایست درشرط

$$\Lambda^t \eta \Lambda = \eta \tag{53}$$

صدق کنند. مجموعه این تبدیلات یک گروه تشکیل می دهد که گروه $O(p,q)$ نامیده می شود. بنابراین گروه لورنتزهمان گروه $O(1,3)$ است.

۱.۵ گروه لورنتز درفضا زمان چهاربعدی

دراین بخش می خواهیم گروه لورنتز درفضازمان ۳ + ۱ بعدی یا $O(1,3)$ را بهتر بشناسیم. این گروه مجموعه تبدیلاتی است که ضرب داخلی (50) را ثابت نگاه می دارند. دیدیم که هرتبدیل $\Lambda \in O(1,3)$ دررابطه $\Lambda^t \eta \Lambda = \eta$ صدق می کند. اگر ازطرفین این رابطه دترمینان بگیریم متوجه می شویم که $\det \Lambda = \pm 1$. بنابراین گروه لورنتز به دوناحیه مجزا تقسیم می شود که با تغییر پیوسته پارامترها نمی توان از یک ناحیه به ناحیه دیگر رفت.
حال به یک قید دیگر توجه می کنیم. اگر عنصر 00 را برای هردوطرف رابطه (53) حساب کنیم بدست می آوریم:

$$\sum_{\mu=0,\nu=0}^{3} \Lambda_{\mu 0} \eta_{\mu\nu} \Lambda \nu 0 = 1 \tag{54}$$

حال بااستفاده از قطری بودن η و فرم صریح آن در (51) طرف چپ تبدیل می شود به

$$\Lambda_{00}^2 = 1 + {\Lambda_{10}}^2 + {\Lambda_{20}}^2 + {\Lambda_{30}}^2. \tag{55}$$

این رابطه نشان می دهد که یا $\Lambda_{00} \geq 1$ و یا $\Lambda_{00} \leq -1$. بنابراین هرکدام از دو ناحیه قبلی به نوبه خود به دو دو ناحیه‌مجزا تقسیم می شوند. درنتیجه گروه لورنتز از چهارناحیه مجزا تشکیل می شود ، که می توان آنها را به شکل زیر نام گذاری کرد:

$$\begin{aligned} O(1,3)^+_{\uparrow} &= \{\Lambda \in O(1,3) | \det \Lambda = 1, \ \ \Lambda_{00} \geq 1\} \\ O(1,3)^+_{\downarrow} &= \{\Lambda \in O(1,3) | \det \Lambda = 1, \ \ \Lambda_{00} \leq -1\} \\ O(1,3)^-_{\uparrow} &= \{\Lambda \in O(1,3) | \det \Lambda = -1, \ \ \Lambda_{00} \geq 1\} \\ O(1,3)^-_{\downarrow} &= \{\Lambda \in O(1,3) | \det \Lambda = -1, \ \ \Lambda_{00} \geq -1\}. \end{aligned} \tag{56}$$

مسلم است که از این چهارناحیه دوناحیه آخر نمی توانند زیرگروه باشند زیرا دترمینان هرعضو آنها برابربا منهای یک است و هردو عضوی ازآنها که درهم ضرب شود، دترمینان یک خواهد داشت. ناحیه دوم نیز زیرگروه نیست زیرا شامل عنصر واحد نیست. به شرط $\Lambda_{00} \leq -1$ دراین ناحیه توجه کنید. تنهاناحیه اول زیرگروه است که آن را گروه تبدیلات ویژه لورنتز می نامیم. برای آنکه ساختمان گروه لورنتز را بهتربشناسیم و ازلحاظ فیزیکی نیز معنای تبدیلات این چهارناحیه را بهتر بفهمیم ماتریس های زیر را درنظرمی گیریم.

$$T = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{57}$$

این دو تبدیل هردو متعلق به گروه لورنتز هستند. T تبدیل وارونی زمان را ایجاد می کند و π تبدیل انعکاس فضایی حول مبداء مختصات فضا را بوجود می آورد. حال اگر $\Lambda \in O(1,3)^+{}_{\uparrow}$، آنگه براحتی می توان دید که

$$T\Lambda \in O(1,3)^-{}_{\downarrow}, \qquad \pi\Lambda \in O(1,3)^-{}_{\uparrow}, \qquad (\pi T)\Lambda \in O(1,3)^-{}_{\downarrow}. \tag{58}$$

درنتیجه قسمت های مختلف چهارگانه فوق هم‌مجموعه های عناصر π, T, I و πT هستند. هرگاه Λ یک تبدیل ویژه لورنتز باشد، آنگاه $T\Lambda$، $\pi\Lambda$ و $\pi T\Lambda$ تبدیل هایی هستند که درآن ها Λ با وارونی زمان، انعکاس فضایی حول مبداء و یا هردو دنبال شده اند. ازاین به بعد ماتوجه خود را به تبدیلات ویژه لورنتز معطوف می کنیم و غالب اوقات نیز صفت ویژه را برای آنها بکارنمی بریم. این تبدیلات تبدیلاتی هستند که به طور پیوسته به تبدیل همانی I متصل هستند. بهترین کارآن است که تبدیلات بی نهایت کوچک را مطالعه کنیم. هرتبدیلی از این نوع به شکل زیراست:

$$\Lambda \approx I + b \tag{59}$$

که درآن درایه های b کوچکند. شرط (53) درمورد این ماتریس تبدیل می شود به

$$\eta b + b^t \eta = 0. \tag{60}$$

درنتیجه b می بایست به فرم زیرباشد:

$$b = \begin{pmatrix} 0 & \theta_1 & \theta_2 & \theta_3 \\ \theta_1 & 0 & -\epsilon_3 & \epsilon_2 \\ \theta_2 & \epsilon_3 & 0 & -\epsilon_1 \\ \theta_3 & -\epsilon_2 & \epsilon_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{61}$$

می توان این ماتریس را به صورت زیرنوشت:

$$b = \theta_1 K_1 + \theta_2 K_2 + \theta_3 K_3 + \epsilon_1 J_1 + \epsilon_2 J_2 + \epsilon_3 J_3, \tag{62}$$

که درآن

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{63}$$

و

$$J_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad J_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{64}$$

بدلایلی که بزودی خواهیم دید K ها مولد های خیز و J ها مولد های دوران نامیده می شوند. این که J ها مولد های دوران هستند باتوجه به آنکه روی زمان هیچ کاری نمی کنند و هم چنین باتوجه به آنچه که درمورد گروه دوران دربخش های قبل دیدیم واضح است. برای K ها کافی است که بدون نقض کلیت تبدیل زیررا درنظربگیریم:

$$\Lambda_1 := I + \theta K_1. \tag{65}$$

براحتی دیده می شود که Λ_1 نقطه $x = (t, x, y, z)$ از فضا زمان را تبدیل به نقطه $x' = (t', x', y', z')$ می کند که درآن:

$$t' \;\; = \;\; t + \theta x$$

$$\begin{aligned} x' &= \theta t + x \\ y' &= y \\ z' &= z, \end{aligned} \tag{66}$$

که فرم بی نهایت کوچک یک تبدیل لورنتز درراستای x با پارامتر θ و یا سرعت $v = \tanh\theta$ است. درواقع یک خیز محدود درراستای x را می توان به شکل زیربدست آورد:

$$\Lambda = \lim_{N\longrightarrow\infty}(I + \frac{\theta}{N}K_1)^N = e^{\theta K_1}. \tag{67}$$

درحالت کلی یک تبدیل خیزخالص به شکل زیراست:

$$\Lambda = e^{\theta_1 K_1 + \theta_2 K_2 + \theta_3 K_3} = e^{\theta n\cdot K}. \tag{68}$$

این خیز بااندازه θ یا سرعت $v = \tanh\theta$ ودرراستای n است. هم چنین یک دوران خالص به شکل زیراست:

$$\Lambda = e^{\epsilon_1 J_1 + \epsilon_2 J_2 + \epsilon_3 J_3} = e^{\theta n\cdot J}, \tag{69}$$

که درآن θ زاویه دوران و n محوردوران است.

۲.۵ گروه لورنتز درفضا زمان های بابعد دلخواه

آنچه که دربخش قبل گفتیم تعمیم سرراستی به فضازمان $d+1$ بعد دارد. این تعمیم با توجه به آنچه که درمورد گروه $SO(n)$ گفتیم برای خواننده دشواری بخصوصی به همراه ندارد. تنها به نکات اصلی اشاره می کنیم. دراین جا بازهم گروه لورنتز به چهارقسمت گفته شده در (56) تقسیم می شود. یک تبدیل بی نهایت کوچک لورنتز به صورت زیرنوشته می شود:

$$\Lambda = I + \sum_i \gamma_i K_i - \sum_{1\le i<j\le d} \epsilon_{ij} J_{ij}, \tag{70}$$

که درآن

$$K_i = E_{0i} + E_{i0}, \qquad J_{ij} = E_{ij} - E_{ji}, \tag{71}$$

مولد های خیز درراستای i و دوران درصفحه ij هستند.

یک تبدیل محدود لورنتز عبارت خواهد بود از:

$$\Lambda = e^{\phi n.K+\theta m\cdot J} \tag{72}$$

که درآن $m \cdot J = \sum_{1\leq i<j\leq d} m_{ij}J_{ij}$.

۶ گروه $U(n)$

فرض کنید که روی یک فضای مختلط V یک ضرب داخلی مثبت تعریف شده است. یک ضرب داخلی مثبت دارای این خاصیت است که $\langle x,x\rangle \geq 0$ و اگر $x=0 \quad \longrightarrow \quad \langle x,x\rangle = 0$. باانتخاب پایه مناسب می توان این ضرب داخلی را برحسب مولفه های بردارها به شکل زیرنوشت:

$$\langle x,y\rangle = \sum_i x_i^* y_i = x^\dagger y. \tag{73}$$

مجموعه تبدیلات خطی ای که این ضرب داخلی را حفظ می کنند تشکیل یک گروه می دهند که گروه یکانی یا گروه $U(n)$ نامیده می شود. هرعضو گروه یکانی درشرط $U^\dagger U = I$ صدق می کند.

۱.۶ گروه $U(2)$

مهمترین مثال از گروه های یکانی چه ازنظرریاضی وچه ازنظرفیزیکی گروه $U(2)$ است. این گروه یک زیرگروه موسوم به $SU(2)$ دارد که ازماتریس های با دترمینان یک تشکیل شده ا ست. هرماتریس $U\in U(2)$ را می توان به صورت $U=e^{i\phi}g$ نوشت که درآن $g\in SU(2)$ است. درنتیجه هم مجموعه های $S(2)$ در $U(2)$ هرکدام با یک فاز یعنی $e^{i\phi}$ مشخص می شوند. این معنای شهودی رابطه $U(2)/SU(2)\equiv U(1)$ است که درفصل قبل دیدیم. این رابطه هم چنین نشان می دهد که برای آنکه عناصر $U(2)$ را پارامتریزه کنیم کافی است که عناصر $SU(2)$ راپارامتریزه کنیم . زیراهرعنصر $U(2)$ از ضرب کردن یک فاز $e^{i\phi}$ دریک عنصر $SU(2)$ بدست می آید. حال فرض کنید که $g\in SU(2)$. g را به شکل $g=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$ قرارمی دهیم و شرط $g^\dagger g = I$ رااعمال می کنیم. بدست می آوریم:

$$a\bar{a}+b\bar{b} \quad = \quad 1$$

$$\begin{aligned} c\bar{c}+d\bar{d} &= 1 \\ a\bar{c}+b\bar{d} &= 0 \\ ad-bc &= 1. \end{aligned} \tag{74}$$

ترکیب این رابطه ها منجر به این می شود که $b=-\bar{c}$ و $a=\bar{d}$ ونهایتاً ماتریس g به شکل زیردرمی آید:

$$g=\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \qquad |a|^2+|b|^2=1. \tag{75}$$

باقراردادن $a=\cos\theta e^{i\alpha}$ و $b=\sin\theta e^{i\beta}$ به پارامتربندی زیر برای عناصر $SU(2)$ می رسیم:

$$g\in SU(2) \qquad \longrightarrow \qquad g=\begin{pmatrix} \cos\theta e^{i\alpha} & \sin\theta e^{i\beta} \\ -\sin\theta e^{-i\beta} & \cos\theta e^{-i\alpha} \end{pmatrix}. \tag{76}$$

۱.۱.۶ مولد های بی نهایت کوچک گروه $SU(2)$

برای بدست آوردن مولدهای گروه $SU(2)$ تبدیلات بی نهایت کوچک را درنظر می گیریم.قرار می دهیم $g\approx I+a\in SU(2)$، که درآن a ماتریسی بادرایه های کوچک است. شرط یکانی بودن منجرمی شود به اینکه

$$a+a^\dagger=0, \tag{77}$$

یعنی اینکه a پادهرمیتی باشد. ازطرفی اگر دترمینان $I+a$ را مساوی صفر قراردهیم می بینیم که می بایست $tr(a)=0$ باشد. بنابراین a را می توان به شکل زیرنوشت:

$$a=\begin{pmatrix} i\epsilon_3 & i\epsilon_1+\epsilon_2 \\ i\epsilon_1-\epsilon_2 & -i\epsilon_3 \end{pmatrix}, \tag{78}$$

ویا

$$a=\epsilon_1T_1+\epsilon_2T_2+\epsilon_3T_3, \tag{79}$$

که درآن

$$T_1:=i\sigma_1=i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_2:=i\sigma_2=i\begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \qquad T_3:=i\sigma_3=i\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{80}$$

مولد های گروه $SU(2)$ نامیده می شوند. می توان با نوشتن $(\epsilon_1,\epsilon_2,\epsilon_3)=:\theta(n_1,n_2,n_3)$ که درآن $n=(n_1,n_2,n_3)$ یک بردارایکه است، تبدیل بی نهایت کوچک $SU(2)$ را به شکل زیرنوشت:

$$g\approx I+i\theta n\cdot\sigma, \tag{81}$$

وازآنجا تبدیل محدود $SU(2)$ شکل زیر را به خود می گیرد:

$$g \in SU(2) \qquad \longrightarrow \qquad g = e^{i\theta n\cdot\sigma}. \tag{82}$$

۲.۶ گروه $SU(3)$

گروه یکانی دیگری که درفیزیک ذرات بنیادی اهمیت دارد گروه $SU(3)$ است. این گروه بیان کننده تقارن نیروی هسته ای قوی یاتقارن کوارک هااست. می دانیم که درطبیعت ٦ نوع کوارک وجود دارد که به کوارک های up ، $down$ ، $strange$ ، $charm$ ، top و $bottom$ مشهورند. برای برای این کوارک ها به ترتیب علائم اختصاری t, c, s, d, u و b بکارمی رود. تمام این کوارک ها ذرات با اسپین $1/2$ هستند ولی بارهمه آنها کسری است. جرم آنها نیز باهم کاملاً متفاوت است. بارالکتریکی آنها درجدول زیر آمده است. معمولاً کوارک های نسل دوم سنگین تر از نسل اول وکوارک های نسل سوم سنگین تراز نسل دوم هستند وبه همین دلیل نیز دیرتر درشتاب دهنده ها آشکارشده اند زیرابرای تولید آنها انرژی بیشتری مورد نیازبوده است. این تفاوت هم چنین استفاده ازنام نسل را برای خانواده های متفاوت توجیه می کند.

(83)

نسل سوم	نسل دوم	نسل اول	بارالکتریکی
t	c	u	$+\frac{2}{3}$
b	s	d	$-\frac{1}{3}$

برای این ذرات مثل همه ذرات دیگر پادذره هایی نیز وجود دارد که همان جرم واسپین را دارند ولی بارالکتریکی آنها منفی بارالکتریکی ذرات مربوطه است. درنتیجه مطابق با جدول فوق جدولی نیز برای پادکوارک ها داریم:

(84)

نسل سوم	نسل دوم	نسل اول	بارالکتریکی
$\bar{t}$	$\bar{c}$	$\bar{u}$	$-\frac{2}{3}$
$\bar{b}$	$\bar{s}$	$\bar{d}$	$+\frac{1}{3}$

ذرات بنیادی سنگین یا هادرون ها از کوارک ها ساخته می شوند که خود به دو نوع تقسیم می شوند. مزون ها که از دو کوارک ساخته می شوند و باریون ها که از سه کوارک ساخته می شوند. جدول زیر ترکیب بعضی از باریون ها و مزون ها را نشان می دهد:

باریون یا مزون	ترکیب کوارکی	بارالکتریکی
p	uud	$+1$
n	udd	0
Λ	uds	0
$\sum^+$	uus	$+1$
$\sum^0$	uds	0
$\sum^-$	dds	-1
Δ^{++}	uuu	$+2$
π^+	$u\overline{d}$	$+1$
π^-	$\overline{u}d$	-1
K_0	$d\overline{s}$	0
$\overline{K}_0$	$\overline{d}s$	0

(85)

یک کوارک که آن را به طور کلی با q نشان می دهیم یک خصلت درونی مثل بارالکتریکی دارد که این خصلت درواقع نشان دهنده بارهسته ای آن است و تعیین می کند که این کوارک چه نیرویی به دیگر کوارک ها وارد کند. برعکس بارالکتریکی که تنها به دونوع مثبت و منفی وجود دارد بارهسته ای درسه نوع ظاهرمی شود. این خصلت را رنگ نامیده اند اگر چه هیچ نسبتی با رنگ به مفهوم متعارف آن ندارد. درواقع یک کوارک می تواند دریکی از سه حالت کوانتومی

$$|R\rangle := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |G\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad |B\rangle := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \tag{86}$$

قرارگیرد و بسته به اینکه درکدام حالت باشد می گوییم بار R ، G یا B دارد. می دانیم که در نیروی الکترومغناطیسی یک تقارن وجود دارد به این معنا که نیروی بین دو بار q, q' با نیروی بین دو بار$-q, -q'$ هیچ تفاوتی نمی کند. دراین جا بایک تقارن ساده مواجه هستیم. تقارن نیروی هسته ای قوی نیزشبیه به این تقارن است . نیروی بین دو کوارک با بارهای B, B هیچ تفاوتی با نیروی بین دو کوارک با بارهای G, G یا R, R

ندارد. اما این حقیقت که بارکوارک ها بجای دونوع مثبت و منفی سه نوع است و هم چنین این که می توان باتوجه به مکانیک کوانتومی کوارک را درترکیبی از سه حالت باردار خود یعنی درحالتی مثل

$$|\psi\rangle = \alpha|R\rangle + b|G\rangle + c|B\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \quad (87)$$

تصور کرد این امکان را بوجود می آورد که تبدیلات گسترده تری را درمورد حالت های کوارک ها مطالعه کنیم. نتیجه این مطالعات تجربی و نظری آن است که اگر دو کوارک درحالت های دلخواه $|\phi\rangle = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ و $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ داشته باشیم نیروی بین آنها هیچ تفاوتی با نیروی بین دوکوارک درحالت های $U|\phi\rangle$ و $U\psi\rangle$ که درآن U یک ماتریس یکانی است نخواهد داشت.

این تقارن، تقارن رنگ $Color Symmetry$ یا تقارن $SU(3)$ درنیروی هسته ای قوی نامیده می شود. کشف این که چنین تقارنی دردنیای ذرات وجود دارد یکی از فصل های مهم درتاریخ تحول فیزیک ذرات بنیادی بوده است. بااستفاده از این تقارن نیز ذرات ناشناخته جدیدی پیش بینی و سپس درآزمایشگاه کشف شده اند.

علاقمندان به این موضوع می بایست برای مطالعه بیشتر به کتاب های ذرات بنیادی مراجعه کنند.

۱.۲.۶ مولدهای گروه $SU(3)$

برای بدست آوردن مولدهای گروه $SU(3)$ مثل همیشه تبدیلات نزدیک به تبدیل همانی یعنی ماتریس های نزدیک به ماتریس واحد رادرنظرمی گیریم. هرگاه $g = I + a$ چنین ماتریسی باشد آنگاه شرط یکانی بودن الزام می کند که a یک ماتریس پادهرمیتی با ردّ صفر باشد. می توان a را برحسب پایه ای از ماتریس های پادهرمیتی بدون ردّ بسط داد. یک انتخاب برای چنین پایه ای عبارت است از:

$$\begin{aligned}
H_1 &:= i(E_{11} - E_{22}), \\
H_2 &:= i(E_{22} - E_{33}), \\
T_{12}^{+} &:= i(E_{12} + E_{21}), \\
T_{12}^{-} &:= (E_{12} - E_{21}), \\
T_{13}^{+} &:= i(E_{13} + E_{31}), \\
T_{13}^{-} &:= (E_{13} - E_{31}), \\
T_{23}^{+} &:= i(E_{23} + E_{32}), \\
T_{23}^{-} &:= (E_{23} - E_{32}).
\end{aligned} \quad (88)$$

در یک انتخاب دیگرماتریس های H_1 و H_2 به صورت زیردرنظرگرفته می شوند:

$$H_1 := \frac{1}{\sqrt{2}} i(E_{11} - E_{22}),$$
$$H_2 := \frac{1}{2\sqrt{3}} i(E_{11} + E_{22} - 2E_{33}) \quad (89)$$

فایده این انتخاب دوم آن است که پایه جدید تحت ضرب داخلی متعارف ماتریس ها یعنی $\langle A, B\rangle := tr(A^\dagger B)$ متعامداست.
بدین ترتیب گروه $SU(3)$، هشت تا مولد یا هشت تا پارامترحقیقی پیدا می کند. باهمین استدلال می توان تعداد پارامترهای حقیقی گروه $SU(n)$ وهم چنین مولد های آن را پیداکرد. تعداد پارامترهای حقیقی گروه $SU(n)$ برابراست با $n^2 - 1$ و تعداد پارامترهای حقیقی گروه $U(n)$ برابرخواهد بود با n^2.

۷ گروه $U(p,q)$

ممکن است که ضرب داخلی که روی فضای مختلط V تعریف کرده ایم مثبت نباشد. باانتخاب یک پایه مناسب می توان ضرب داخلی رابرحسب مولفه ها به شکل زیرنوشت:

$$\langle x, y\rangle = x^\dagger \eta y. \quad (90)$$

که درآن

$$\eta = diagonal(1, 1 \cdots 1, -1, -1, \cdots -1). \quad (91)$$

مجموعه تبدیلات خطی ای که این ضرب داخلی را حفظ می کنند گروه $U(p,q)$ نامیده می شود. هرعضو g این گروه دررابطه زیرصدق می کند:

$$g^\dagger \eta g = \eta. \quad (92)$$

توجه به این نکته لازم است که با تغییرپایه نمی توان در متریک (91)، -1 ها را تبدیل به 1 کرد و درنتیجه گروه $U(p,q)$ را نمی توان با گروه $U(p+q)$ یکسان گرفت.
این گروه کاربرد چندانی درفیزیک ندارد. مطالعه بیشتر این گروه را به تمرین ها واگذارمی کنیم.

۸ گروه همتافته $SP(2n)$

مهمترین گروه ماتریسی کلاسیک دیگری که می بایست معرفی کنیم گروه همتافته یا *Symplectic* است. این گروه درمکانیک کلاسیک اهمیت دارد. می دانیم که درمکانیک هامیلتونی وضعیت هردستگاه بایک نقطه دریک فضای فاز $2n$ بعدی توصیف می شود. مختصات موضعی فضای فاز را می توان به شکل زیر درنظرگرفت:

$$R = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ q_n \\ p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ p_n \end{pmatrix}. \tag{93}$$

کروشه پوآسون مختصات مختلف به صورت زیراست :

$$\begin{aligned} \{q_i, q_j\} &= 0 \\ \{p_i, p_j\} &= 0 \\ \{q_i, p_j\} &= \delta_{ij}, \end{aligned} \tag{94}$$

که می توان آن را به فرم فشرده زیرنوشت:

$$\{R_i, R_j\} = J_{ij}, \tag{95}$$

که درآن J ماتریس $2n$ بعد ی زیراست:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}. \tag{96}$$

هم چنین می دانیم که کروشه پوآسون هردو تابع f, g درفضای فاز به صورت زیر تعریف می شود:

$$\{f, g\} := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial g}{\partial q_i}\frac{\partial g}{\partial p_i}. \tag{97}$$

این کروشه به شکل فشرده زیرقابل بیان است:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial R_i} J_{ij} \frac{\partial g}{\partial R_j}, \tag{98}$$

که درآن ازقرارداد جمع روی شاخص های تکراری استفاده شده است.
تبدیل یکانی از مختصات R به مختصات R' تبدیلی است که کروشه پوآسون بین مختصه هاراتغییرندهد. هرگاه تبدیل فوق یک تبدیل خطی باشد یعنی هرگاه

$$R' = SR, \quad R'_i = S_{ij}R_j \tag{99}$$

که درآن S یک ماتریس بادرایه های ثابت است آنگاه یکانی بودن تبدیل به این معناست که شرط زیربرقرارباشد:

$$\{R'_i, R'_j\} \equiv S_{ik}S_{jl}\{R_k, R_l\} \equiv S_{ik}S_{jl}J_{kl} \tag{100}$$

هرگاه بخواهیم که متغیرهای جدید نیزمتغیرهای کانونیک باشند یعنی تبدیل (99) یک تبدیل کانونیک باشد می بایست طرف راست این عبارت برابربا J_{ij} باشد یعنی

$$S_{ik}J_{kl}S_{ik} = J_{ij} \tag{101}$$

و یا به شکل فشرده تر:

$$SJS^t = J. \tag{102}$$

تبدیلات خطی که دررابطه فوق صدق می کنند تبدیلات کانونیک نامیده می شوند. البته تبدیل کانونیک الزاماًخطی نیست و مابرای سادگی بحث، خود را به تبدیلات خطی محدود کرده ایم. مجموعه تبدیلاتی از این نوع یک گروه تشکیل می دهند که گروه همتافته یا گروه $Symplectic$ نامیده می شود.
ازاین انگیزش فیزیکی که بگذریم می توان گروه تبدیلات همتافته را به شکل کلی زیر تعریف کرد.

فرض کنید که یک فضای خطی حقیقی $2n$ بعدی با مختصات

$$R := \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \cdot \\ q_n \\ p_1 \\ p_2 \\ \cdot \\ p_n \end{pmatrix} \tag{103}$$

داریم. دراین فضابین هردونقطه R و R' یک ضرب داخلی ازنوع زیرتعریف شده است.

$$\langle R, R' \rangle := R^t J R, \tag{104}$$

که درآن

$$J = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}, \tag{105}$$

و I_n نشان دهنده ماتریس واحد $n \times n$ است.
مجموعه تبدیلات خطی ای که ین ضرب داخلی را حفظ می کنند تشکیل یک گروه می دهند که گروه همتافته یا $SP(2n)$ نامیده می شود.

۱.۸ تبدیلات بی نهایت کوچک همتافته

هرگاه $S = I + a$ یک تبدیل بی نهایت کوچک همتافته باشد آنگاه ازرابطه $S^t J S = J$ بدست می آوریم $a^t J + Ja = 0$. اگر a را به صورت بلوکه قطری

$$a = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & W \end{pmatrix} \tag{106}$$

درنظربگیریم ازرابطه $a^t J + Ja = 0$ بدست می آوریم:

$$Z = Z^t, \qquad Y = Y^t, \qquad W = -X^t, \tag{107}$$

ودرنتیجه شکل ماتریس a به صورت زیردرمی آید:

$$a = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & -X^t \end{pmatrix} \tag{108}$$

که درآن Y و Z ماتریس های متقارن n بعدی هستند و X یک ماتریس دلخواه n بعدی است. یک شمارش ساده نشان می دهد که تعدادپارامترهای حقیقی و مستقل این ماتریس برابراست با $n(2n+1)$. بنابراین گروه $SP(2n)$ یک گروه $n(2n+1)$ پارامتری است.
ساده ترین گروه ازاین نوع گروه $SP(2)$ است. دراین مورد ماتریس a را می توان به شکل زیرنوشت:

$$a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & -\alpha \end{pmatrix} = \alpha\sigma_3 + \beta\sigma^+ + \gamma\sigma_-. \tag{109}$$

درنتیجه مولدهای گروه $SP(2)$ عبارت خواهد بود از: $\sigma_3, \sigma^+, \sigma^-$. یک تبدیل خطی همتافته دردوبعد توسط ماتریس زیر ایجاد می شود:

$$S = e^{\theta(n_3\sigma_3 + n_+\sigma^+ + n_-\sigma^-)}, \tag{110}$$

که درآن n_1, n_2, n_3 پارامترهای حقیقی ای هستند که درشرط $n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$ صدق می کنند.
برای مطالعه خواص دیگر این گروه و گروه های ماتریسی دیگری را که دراین درس معرفی کردیم خواننده می بایست به مجموعه تمرین های این درس مراجعه کند.
تعداد پارامترهای گروه های ماتریسی کلاسیک درجدول زیر نشان داده شده اند.

نام گروه ماتریسی	تعداد پارامترها ی حقیقی
$GL(n,R)$	n^2
$SL(n,R)$	n^2-1
$GL(n,C)$	$2n^2$
$SL(n,C)$	$2n^2-2$
$O(n), SO(n)$	$\frac{n(n-1)}{2}$
$O(p,q), SO(p,q)$	$\frac{(p+q)(p+q-1)}{2}$
$U(n)$	n^2
$SU(n)$	n^2-1
$U(p,q)$	$(p+q)^2$
$SU(p,q)$	$(p+q)^2-1$
$SP(2n)$	$n(2n+1)$

(111)